

可拓概率空间研究

王健吾

(广东工业大学 物元分析研究所, 广东 广州 510090; 铜陵财经专科学校 基础部, 安徽 铜陵 244000)

摘要: 提出了 I 型和 II 型可拓概率空间两个概念, 并讨论了它们的一般性质.

关键词: 可拓集合; 可测空间; 概率空间

中图分类号: O211

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(1999)03-0117-05

1983 年, 蔡文提出可拓集合概念, 在此基础上, 他和许多学者共同努力, 已经使可拓集合理论略具雏形. 在可拓集合理论这一课题之中, 还有大量基础性工作要做. 本文提出的可拓集合上的测度的一般概念, 就是这种基础性工作之一, 关于它至今尚无人涉及.

1 I 型可拓概率空间

定义 1^[1] 设 U 为论域, K 是 U 到实数域 R 的一个映射, 称

$$A = \{(u, y) | u \in U, y = K(u)\}$$

为论域 U 上的一个可拓集合. $y = K(u)$ 为 A 的关联函数, $K(u)$ 为 u 关于 A 的关联度.

论域 U 上的可拓集合的全体记为 $\mathcal{A}(U)$. 有时为了指明 U, K , 可拓集合 A 详记为 (A, U, K) .

定义 2 设 U 为论域, $\mathcal{A}$ 为 U 上的 σ 代数, P 是 $\mathcal{A}$ 上概率, $(A, U, K) \in \mathcal{A}(U)$, 如果 $K(u)$ 关于 $\mathcal{A}$ 可测, 则称 $(U, \mathcal{A}, P)$ 为 A 的 I 型可拓概率空间, $(U, \mathcal{A})$ 为 A 的 I 型可拓可测空间.

在理论上, I 型可拓概率空间与经典概率空间没有本质区别, 但是前者的 σ 代数 $\mathcal{A}$ 是使关联函数 $K(u)$ 为可测的 σ 代数, 所以在 $\mathcal{A}$ 上定义的概率就与关联函数 $K(u)$ 有某种联系.

今后在论域 U 上, 我们用 $\sigma(K(u))$ 表示由 $K(u)$ 生成的 σ 代数, 它显然是 U 上使 $K(u)$ 可测的最小 σ 代数.

定理 1 设 $(A, U, K) \in \mathcal{A}(U)$, $(U, \mathcal{A})$ 为 A 的 I 型可拓可测空间, 其中 $\mathcal{A} = \sigma(K(u))$. 令 $\varphi = \{A: A = U \text{ 或 } (u: a \leq K(u) < b), \text{ 其中 } a, b \text{ 为实数, } b \text{ 可取为 } \infty, a \text{ 可取为 } -\infty, \text{ 但这时 } \leq \text{ 应改为 } <, \text{ 即 } -\infty < K(u) < b\}$.

如果 P 是 φ 上的概率, 则 P 在 φ 生成的 σ 代数 $\sigma(\varphi)$ 上存在一个扩张, 若记这个扩张仍为 P , 则 $(U, \mathcal{A}, P)$ 为 A 的 I 型可拓概率空间.

证明: 只要注意到 φ 是 U 的半集代数, 且 $\mathcal{A} = \sigma(\varphi)$, 该定理就是普通测度论的一般定理, 故证明从略.

收稿日期: 1999-01-19

作者简介: 王健吾 (1939-), 男, 教授; 主要研究方向: 可拓学.

定义 3 设 $(U, \mathcal{A}, P)$ 是概率空间, (A, U, K_1) 和 (B, U, K_2) 是两个可拓集合, 且 $K_1(u)$, $K_2(u)$ 都是 $\mathcal{A}$ 可测函数, 则称 $(U, \mathcal{A})$ 为 $\{A, B\}$ I 型可拓可测空间, $(U, \mathcal{A}, P)$ 为 $\{A, B\}$ I 型可拓概率空间.

一般地, 设 $\mathcal{F}(U) = \{(A_t, U, K_t), t \in \Gamma\}$ 为 U 上可拓集合族, 其中 Γ 是某一指标集. 如果对于 $\forall t \in \Gamma$, K_t 为 $\mathcal{A}$ 可测函数, 则称 $(U, \mathcal{A})$ 为 $\mathcal{F}(U)$ I 型可拓可测空间, $(U, \mathcal{A}, P)$ 为 $\mathcal{F}(U)$ I 型可拓概率空间.

在可拓集合理论中, 元素和关联函数的变换是至关重要的. 为了下面理论的需要, 我们把对元素的变换也看作是对关联函数的变换. 实际上, 如果 $(A, U, K_1) \in \mathcal{A}(U)$, T' 是元素的变换, 则令 $K_2(U) = K_1(T'u)$, 就得到 K_1 的一个变换, 记之为 T , 于是

$$K_2(u) = TK_1(u) = K_1(T'u)$$

我们是从关联函数的可测性出发来定义 I 型可拓概率空间的, 这样, 当我们把对元素的变换也看成是对关联函数的变换时, 就使得该理论不仅仅适用于关联函数的变换, 也能适用于元素之间的变换了.

性质 1 设 $(U, \mathcal{A})$ 是关于 (A, U, K_1) 的 I 型可拓可测空间, T 是 K_1 的一个变换, 如果 $K_2 = TK_1$, 仍是 $\mathcal{A}$ 可测函数, 则集合

$$A_+(T) = \{u | u \in U, K_1(u) \leq 0, K_2(u) \geq 0\},$$

$$A_-(T) = \{u | u \in U, K_1(u) \geq 0, K_2(u) \leq 0\},$$

$$A_+(T) = \{u | u \in U, K_1(u) \geq 0, K_2(u) \geq 0\},$$

$$A_-(T) = \{u | u \in U, K_1(u) \leq 0, K_2(u) \leq 0\}$$

均是 $\mathcal{A}$ 可测集.

上述集合分别称为 A 关于变换 T 的正可拓域、负可拓域、正稳定域、负稳定域, 它们在可拓集合理论中起着重要的作用. 倘若我们在 $(U, \mathcal{A})$ 上建立了概率测度 P , 那末我们就可以分别求出上述各种可测集的概率了, 从而使概率论理论也能在可拓集合上发挥作用. 至于在 $(U, \mathcal{A})$ 上怎样建立概率测度 P , 可以按照定理 1 所提供的方法, 即首先在由 $K_1(u)$ 和 $K_2(u)$ 所形成的半集代数 Φ 上建立概率, 然后再扩张它到 $\mathcal{A} = \sigma(\Phi)$ 上 (这里不妨假设 $\mathcal{A} = \sigma(\Phi)$).

2 II 型可拓概率空间

定义 4^[1] 设 $(A, U, K_1), (B, U, K_2) \in \mathcal{A}(U)$, 称

$$C = \{(u, y) | u \in U, y = K_1(u) \vee K_2(u)\}$$

为 A 与 B 之并, 记作 $C = A \cup B$. 称

$$D = \{(u, y) | u \in U, y = K_1(u) \wedge K_2(u)\}$$

为 A 与 B 之交, 记作 $D = A \cap B$. 称

$$E = \{(u, y) | u \in U, y = -K_1(u)\}$$

为 A 的非集, 记作 $E = A^C$.

定义5 设 U 为任一论域, $\mathcal{F}(U)$ 为 U 上可拓集合族, 满足:

(1) $O = \{(u, y) | u \in U, y = K(u) \equiv 0\} \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$;

(3) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$.

又设映射 $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, 满足:

(4) $P(O) = \frac{1}{2}$;

(5) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$;

(6) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

则称 $\mathcal{F}$ 为可拓事件域, 其中任一可拓集合 A 称为可拓事件, P 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的可拓概率, $P(A)$ 为可拓事件 A 的概率, 称 $(U, \mathcal{F}, P)$ 为 II 型可拓概率空间.

设 $(U, \mathcal{K}, P)$ 是经典概率空间, 设 $\mathcal{F}(U)$ 是 U 上可拓事件域, 如果 $\forall A \in \mathcal{F}$ 其关联函数 $K(u)$ 为 $\mathcal{K}$ 可测, 则 $(U, \mathcal{F}, P)$ 就是 $\mathcal{F}$ 的 I 型可拓概率空间, 这时如果令

$$P(A) = \frac{1}{\pi} \int_U \tan K(u) \cdot dP(u) + \frac{1}{2},$$

则我们有下面定理

定理2 $(U, \mathcal{F}, P)$ 为 II 型可拓概率空间.

证明: 直接验证, 可知 P 满足定义 5 中的条件(4)、(5)、(6).

对于定理 2 的 II 型可拓概率空间, 很容易验证它具有经典概率空间的许多性质. 例如:

1. 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$;

2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

注意: 定义 5 中所提出来的 II 型可拓概率(简称为可拓概率) P , 是对可拓事件域 $\mathcal{F}(U)$ 上每一可拓集合 A 的某种度量, 这种度量是综合性的. 只要规定的 P 满足条件(4)、(5)、(6), 它就是一个 II 型可拓概率. 由此观之, 定理 2 只不过提供了建立 II 型可拓概率的一种方法. 然而这个方法把 I 型和 II 型概率空间联系了起来, 所以显得比较重要.

3 理论实例

例1 设 (A_1, U, K_1) 和 (A_2, U, K_2) 是两个可拓集合, 其中 $K_2 = TK_1$, T 是 K_1 的一个变换. 如果 $(U, \mathcal{K}, P)$ 是上述两个可拓集合的 I 型可拓概率空间. 由性质 1 可知, $A_+(T)$, $A_-(T)$,

$A_+(T)$, $A_-(T)$ 都是 $\mathcal{K}$ 可测集. 现在, 用 $\overline{A_1}$, A_1 分别记 A_1 的负域和正域, 即

$$\overline{A_1} = \{u | u \in U, K_1(u) \leq 0\},$$

$$A_1 = \{u | u \in U, K_1(u) \geq 0\}$$

我们称

$$\begin{aligned} a &= P(A_+(T))/P(\bar{A}_1) && \text{为 } T \text{ 的正效应,} \\ b &= P(A_-(T))/P(A_1) && \text{为 } T \text{ 的负效应,} \\ c &= P(A_+(T))/P(A_1) && \text{为 } T \text{ 的正稳定效应,} \\ d &= P(A_-(T))/P(\bar{A}_1) && \text{为 } T \text{ 的负稳定效应.} \end{aligned}$$

并称 $(a+c)-(b+d)$ 为变换 T 的总效应, 记之为 α . 那末, α 的大小就为我们衡量 T 变换的作用提供了一种标准.

例 2 继续上例. 假设 (A_i, U, K_i) 是一组有限甚至是无限可拓集合族, $i = 0, 1, 2, \dots$, 其中 $K_1(u) = T_1 K(u)$, $K_2(u) = T_2 K_0(u)$, $\dots$, $K_i(u) = T_i K_0(u)$, $\dots$, $i = 1, 2, \dots$,

现设 $(U, \mathcal{A}, P)$ 为诸 $(A_i, U, K_i) (i = 0, 1, 2, \dots)$ I 型可拓概率空间. 仿照上例, 用 (A_0, U, K_0) 代替上例中 (A_1, U, K_1) 的位置, 分别计算 $T_1, T_2, \dots$ 诸变换的总效应 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. 即

$$\begin{aligned} T_1, \quad T_2, \quad \dots, \quad T_i, \quad \dots; \\ \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_i, \quad \dots \end{aligned}$$

比较上面诸 α_i 的大小, 可以选择较好的变换.

因为实际背景往往是这样, 每次变换(前面我们说过元素的变换可以看成是关联函数的变换)都会给事业带来一定的影响, 这种影响自然可以分解为正面和负面效应, 而总效应就为全面衡量一个变换的作用提供了客观标准, 用它作为决策的依据自然是一种科学方法了.

例 3 继续上例. 假设 $(A_i, U, K_i) (i = 0, 1, 2, \dots)$ 属于可拓事件域 $\mathcal{F}(U)$. 而且我们建立了 II 型可拓概率 P , 例如在上例中 $(U, \mathcal{A}, P)$ 的基础上, 用定理 2 的方法建立 P . 这时我们可以对每一可拓集合 A_i , 计算 $P(A_i)$, 即

$$\alpha_i = P(A_i) = \frac{1}{\pi} \int_U \tan K_i(u) dP(u) + \frac{1}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

我们称 α_i 为每一可拓集合 A_i 的综合效应, 它的大小又为衡量每一个变换 T_i 的作用提供了客观依据, 而这个依据是整体性的, 在某种意义上, 它比前面所定义的总效应更富有建设性.

参考文献:

[1] 蔡文. 物元模型及其应用[M]. 科学技术文献出版社, 北京: 1994. 122, 133.

Probability Space on Extension Set

WANG Jian-wu

(Research Institute of Matter-element Analysis, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China;
Dept. of Basic Courses, Tongling College of Finance and Economics, Tongling Anhui 244000, China)

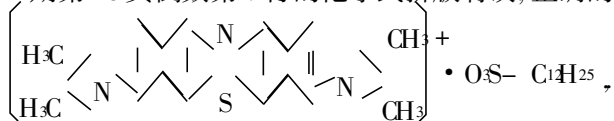
Abstract: In this paper, two concepts of probability space I and space II on extension set are proposed and general properties of space I and space II are discussed.

Key words: extension set; measurable space; probability space

(责任编辑: 杨耀辉)

勘误:

本刊 1999 年第 2 期第 48 页倒数第 7 行的化学式排版有误, 正确的化学式应为:



特此更正, 并向作者及广大读者致歉.

(本刊编辑部)